電磁気学 B 演習　第 13 回解答

1.　地表が毎秒受ける放射エネルギーは

$$S=\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E^2=10^3 \qquad \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}=\frac{1}{\mu_0 c}=2.65\times10^{-3}\right)$$

よって　$E=\sqrt{\dfrac{1\times10^3}{2.65\times10^{-3}}}=6.142\times10^2$ [V/m]

磁界 $H=\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E=2.65\times10^{-3}\times6.142\times10^2=1.63$ [AT/m]

2.

解　(1)　媒質中の伝搬速度は $v=1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ であるから屈折率は $n=c/v=\sqrt{\varepsilon\mu/\varepsilon_0\mu_0}$ であるが，強磁性体以外では $\mu\fallingdotseq\mu_0$ であるから，$n\fallingdotseq\sqrt{\varepsilon/\varepsilon_0}$，$\sqrt{\varepsilon/\mu}\fallingdotseq n\sqrt{\varepsilon_0/\mu_0}$．前問の結果に入れると

$$反射波\ E_1=\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}E, \qquad H_1=n_1\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_1$$

$$透過波\ E_2=\frac{2n_1}{n_1+n_2}E, \qquad H_2=n_2\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_2$$

$$反射率\quad r=\left(\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}\right)^2, \quad 透過率\ t=\frac{4n_1n_2}{(n_1+n_2)^2}=1-r$$

(2)　$n_2>n_1$ のときは，上の式より，反射波 E_1 は E と反対方向であって，位相が π だけ変化する．磁界 H_1 は位相が変化しないが，乾板等で検するとき電界が問題になるので，電界を主にしていうのである．

(3)　反射率 $r=\left(\dfrac{1.5-1}{1.5+1}\right)^2=0.04$，透過率 $t=1-r=0.96$

3. (1)　$\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\nabla\cdot\boldsymbol{J}+\varepsilon_0\mu_0\nabla\cdot\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$

$$=\mu_0\nabla\cdot\boldsymbol{J}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial(\nabla\cdot\boldsymbol{E})}{\partial t}$$

$$=\mu_0\nabla\cdot\boldsymbol{J}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right)$$

$$=\mu_0\left(\nabla\cdot\boldsymbol{J}+\varepsilon_0\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)$$

また $\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{A}=0$ （$\boldsymbol{A}$ は任意のベクトル)であるので

$$\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{B}=0=\mu_0\left(\nabla\cdot\boldsymbol{J}+\varepsilon_0\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)$$

$$\therefore \nabla \cdot \boldsymbol{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$ (電荷密度と電流密度に対する連続の方程式)

(2) $$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\mathbf{E}^2\right) = \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}(\nabla \times \mathbf{B}) - \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\mu_0}\mathbf{B}^2\right) = \varepsilon_0 \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E})$$

である。そして

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E}(\nabla \times \mathbf{B})$$

であることに注意すると

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\mathbf{B}^2\right) = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}(\nabla \times \mathbf{B}) - \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} - \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E})$$

$$= -\frac{1}{\mu_0}\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$$

$\frac{1}{\mu_0}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{S}$ というポインティングベクトルとなる。

電荷密度、電流密度はどちらも 0 なので、 $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ =0

$$\therefore \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\mathbf{B}^2\right) + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0$$