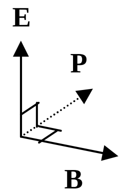
電磁気学 B 演習　第 12 回解答

1.　まず円柱表面における電場と磁束密度を求める。オームの法則より、円柱の両端の電位差は IR である。円柱の長さを l とすると、円柱表面を含む円柱内部の電場は IR/l となる。



次に円柱表面の磁場であるが、円柱の軸上を中心とする半径 r の円周を考え、アンペールの法則を適用すると、円周上の磁束密度は $\mu_0 I/2\pi r$ で表される。従って円柱の半径を a とおくと、円柱表面の磁束密度は $\mu_0 I/2\pi a$ となる。

ポインティングベクトルを $\boldsymbol{P}$ とすると、$\boldsymbol{P} = \dfrac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})$ となる。従って $\boldsymbol{P}$ 、$\boldsymbol{E}$ 、$\boldsymbol{B}$ の方向は右上図のようになり、ポインティングベクトルは円柱表面に垂直でかつ円柱内部に向かう方向となる。その大きさは、

$$|\boldsymbol{P}| = \frac{1}{\mu_0}|\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}| = \frac{EB}{\mu_0} = \frac{I^2R}{2\pi la}$$

である。これを円柱側表面に渡って積分することで、円柱内に流入する単位時間当たりの総エネルギー量が分かる。すなわち、

$$\int_S \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}dS = \int_S PdS = \frac{I^2R}{2\pi la}\int_S dS$$

$\int_S dS$ は円柱の側表面の面積であり、$2\pi la$ に等しいので、円柱内に流入する単位時間当たりの総エネルギー量は

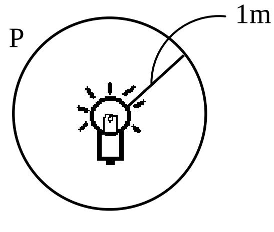
$$\int_S \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}dS = \frac{I^2R}{2\pi la}\int_S dS = I^2R$$

となり、ジュール熱 I^2R に等しくなる。

2. (1)　$\mathrm{P} = \dfrac{1}{\mu_0}\mathrm{E}\times\mathrm{B}$

(2)　電球から 1m の距離の球表面を通過するエネルギーは問題文より 100W であるので

$$\int \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}dS = 100[W]$$



となる。また $\dfrac{H}{E}=\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}$ であることより、

$$\int \mathrm{P}\cdot \mathrm{n}dS = PS = 4\pi r^2 P$$
$$= 4\pi r^2 EH = 4\pi r^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E^2 = 100[W]$$

$$\therefore E = \sqrt{\frac{100}{4\pi r^2\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}}} = \sqrt{\frac{100}{4\pi\cdot 2.654\times 10^{-3}}} = 54.8\ [V/m]$$

3. 連続的に分布している電荷を、電荷密度 $\rho(\mathbf{r})$ 、この電荷分布により生じている電位を

$\phi(\mathbf{r})$ とすると、エネルギー W_e は

$$W_e = \frac{1}{2}\int \rho(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r})dV$$

となる。ここにガウスの法則 $\nabla\cdot\mathbf{E} = \rho/\varepsilon_{\mathbf{0}}$ を代入すると

$$W_e = \int \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\phi(\mathbf{r})dV$$

x 方向の積分だけを考えると、部分積分して

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial E_x}{\partial x}\phi dx = \left[E_x\phi\right]_{x=-\infty}^{x=\infty} - \int E_x\frac{\partial \phi}{\partial x}dx = \int E_x^2 dx$$

となる。ここで、$x\to\pm\infty$ では $E_x\to 0$ 、また $E_x = -\partial\phi/\partial x$ とする。
y,z 積分も同様になるので、

$$W_e = \int \frac{\varepsilon_0}{2}\mathbf{E}^2 dV$$

となる。

　ある時刻の電流を $\mathbf{j}(t)$ 、誘導電場を $\mathbf{E}$ とする。すると微小時間 Δt での仕事 ΔW は

$$\frac{\Delta W}{\Delta t} = -\int \mathbf{j}\cdot\mathbf{E}dV$$

マクスウェル方程式を代入すると、

$$\frac{\Delta W}{\Delta t} = -\int \left\{ \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{E} - \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} \right\} dV$$

ここで右辺の第二項は

$$\int_0^\infty \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E})^2 dt = \mathbf{E}^2 (t = \infty) - \mathbf{E}^2 (t = 0) = 0$$

となるので、

$$\frac{\Delta W}{\Delta t} = -\int \left\{ \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{E} \right\} dV = -\int \left\{ \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{B} \right\} dV$$

$$= \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{B} dV = \frac{1}{2} \int \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B}^2) dV$$

これを時間で積分すれば、

$$W_m = \int \frac{\Delta W}{\Delta t} dt = \frac{1}{2\mu_0} \int \left\{ \int \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B}^2) dt \right\} dV = \frac{1}{2\mu_0} \int \mathbf{B}^2 dV$$

となる。

また、平面波の場合では、$\left| \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{E}} \right| = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ より、$\mathbf{B}^2 = \mu_0 \varepsilon_0 \mathbf{E}^2$

これから、$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \int \mathbf{B}^2 dV = \frac{1}{2\mu_0} \int \mu_0 \varepsilon_0 \mathbf{E}^2 dV = \int \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 dV = W_e$

よって $W_m = W_e$

4. 反射波、透過波の電界、磁界をそれぞれ（E_1、H_1）、（E_2、H_2）とする。E_1とE_2を同方向にとると、透過波と反射波は進行方向が逆であること、および**E**、**H**、v が右手の法則を満たすから、H_1、H_2は互いに逆方向となる。よって、境界条件は、

$$\begin{cases} E + E_1 = E_2 \\ H - H_1 = H_2 \end{cases}$$

また、電磁波の電界と磁界の関係は、

入射波：$H = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E$、　反射波：$H_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_1$、　透過波：$H_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} E_2$

これらより、

$$
\begin{cases}
\text{反射波}\quad E_1 = \dfrac{\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\mu_1}} - \sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\mu_2}}}{\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\mu_1}} + \sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\mu_2}}} E\text{、}\qquad H_1 = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_1 \\
\text{透過波}\quad E_2 = \dfrac{2\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\mu_1}}}{\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\mu_1}} + \sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\mu_2}}} E\text{、}\qquad H_2 = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\mu_2}} E_2
\end{cases}
$$

また、エネルギーの流れは一般に $EH = \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}} E^2$ であるから、

$$
\begin{cases}
\text{反射率}\quad r = \dfrac{\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\mu_1}} {E_1}^2}{\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E^2} = \left(\dfrac{E_1}{E}\right)^2 = \left(\dfrac{\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\mu_1}} - \sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\mu_2}}}{\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\mu_1}} + \sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\mu_2}}}\right)^2 \\
\text{透過率}\quad t = \dfrac{\sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\mu_2}} {E_2}^2}{\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E^2} = \dfrac{\sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\mu_2}}}{\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\mu_1}}} \left(\dfrac{E_2}{E}\right)^2 = \dfrac{4\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\mu_1 \mu_2}}}{\left(\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\mu_1}} + \sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\right)^2}
\end{cases}
$$