電磁気学Ｂ演習　第 11 回　解答（暫定版）

１．

Ｂに対する境界条件 $B_{1n}=B_{2n}$ より、空隙中のＨを H_a、鉄芯内のＨを H_i とすると、

$$\mu_0 H_a = \mu H_i$$

であるから、比透磁率を χ_M として、

$$H_a = \frac{\mu}{\mu_0} H_i = \chi_M H_i$$

となる。アンペールの法則 $\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = NI$ より、空隙の幅をｄ、鉄芯の長さを l として、

$$NI = H_i l + H_a d = H_i l + \chi_M H_i d = (l + \chi_M d) H_i$$

であるから、巻数Ｎは

$$N = \frac{(l + \chi_M d) H_i}{I}$$

となる。$B = \mu H_i = \chi_M \mu_0 H_i$ より $H_i = \dfrac{B}{\chi_M \mu_0}$ であるから、

$$N = \frac{(l + \chi_M d) B}{I \chi_M \mu_0}$$

図より、鉄芯の長さ l は $l = (20 - 3.5\times 2)\times 4 - 2 = 50[cm] = 0.5[m]$、および $d = 0.02[m]$。

また磁束密度Bは、一般的には単位は[Wb]（ウェーバ）で表され、1[Wb]＝10^4[G]（ガウス）であるから、B=100[G]=10^{-2}[Wb]。よって、

$$N = \frac{(0.5 + 3\times 10^3 \times 0.02)\times 10^{-2}}{1\times 3000\times 4\pi \times 10^{-7}} = 160 \quad [巻]$$

２．

ＡＤ、ＡＢＣＤ、ＡＦＥＤの部分の磁気抵抗をそれぞれ R_m、R_{m1}、R_{m2} とすると、

$$R_{m1} = \frac{l_1}{\mu S_1}、R_{m2} = \frac{l_2}{\mu S_2}、R_m = \frac{l-\delta}{\mu S} + \frac{\delta}{\mu_0 S}$$

キルヒホッフの法則を適用すると、

Ａ点で　$-\Phi + \Phi_1 + \Phi_2 = 0$

ＡＤＣＢで　$\Phi_1 R_{m1} + \Phi R_m = N_1 I_1$

ＡＤＥＦで　$\Phi_2 R_{m2} + \Phi R_m = N_2 I_2$

これを解いて、

$$\Phi = \frac{R_{m1} N_2 I_2 + R_{m2} N_1 I_1}{R_{m1} R_{m2} + R_{m1} R_m + R_{m2} R_m} = \frac{\mu S (l_1 S_2 N_2 I_2 + l_2 S_1 N_1 I_1)}{l_1 l_2 S + l' l_1 S_2 + l' l_2 S_1}$$

$$\Phi_1 = \frac{(R_{m1} + R_m) N_1 I_1 - R_m N_2 I_2}{R_{m1} R_{m2} + R_{m1} R_m + R_{m2} R_m} = \frac{\mu S_2 \{(l_1 S + l' S_1) N_1 I_1 - l' S_1 N_2 I_2\}}{l_1 l_2 S + l' l_1 S_2 + l' l_2 S_1}$$

$$\Phi_2 = \frac{(R_{m1}+R_m)N_2I_2 - R_mN_1I_1}{R_{m1}R_{m2}+R_{m1}R_m+R_{m2}R_m} = \frac{\mu S_1\{(l_2S+l'S_2)N_2I_2 - l'S_2N_1I_1\}}{l_1l_2S+l'l_1S_2+l'l_2S_1}$$

(ただし、$l' = l + (\mu_s - 1)\delta$、$\mu_s = \mu/\mu_0$)

空隙の磁界Hは

$$H = \frac{\Phi}{\mu_0 S} = \frac{\mu_s(l_1S_2N_2I_2 + l_2S_1N_1I_1)}{l_1l_2S+l'l_1S_2+l'l_2S_1}$$

3.　断面積S、単位長さあたりの巻き数nの無限長ソレノイドの自己インダクタンスLをエネルギーを用いて求めよ。

内部磁界はH=nI。単位長さあたりのエネルギーは

$$U = \int \frac{\mu H^2}{2} dS = \frac{1}{2}\mu n^2 I^2 S$$

$U = \dfrac{1}{2}LI^2$ より、　　　　　　　　　　$L = \mu n^2 S$

電流がIの時のソレノイド内の磁界は $H = NI/l$ であるから

鎖交磁束 $\Phi = NS \cdot \mu_0 H = \dfrac{\mu_0 SN^2}{l} I$

電流が変化するときの磁束変化による起電力は

$$e_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 SN^2}{l} \cdot \frac{dI}{dt}$$

電流は $I = \dfrac{e_i}{R} = -\dfrac{\mu_0 SN^2}{lR} \cdot \dfrac{dI}{dt}$

よって移動電気量 $Q = \int I dt = -\displaystyle\int_{I_0}^{0} \frac{\mu_0 SN^2}{lR} dI = \frac{\mu_0 SN^2}{lR} I_0$

4.

(1) 一次および二次回路に対してキルヒホフの法則を適用する。コイルの両端の電圧は、一次

側が $L_1\dfrac{dI_1}{dt} + M\dfrac{dI_2}{dt}$、二次側が $M\dfrac{dI_1}{dt} + L_2\dfrac{dI_2}{dt}$ なので、

$$\begin{cases} \text{一次側：} L_1\dfrac{dI_1}{dt} + M\dfrac{dI_2}{dt} + R_1I_1 = E \\ \text{二次側：} M\dfrac{dI_1}{dt} + L_2\dfrac{dI_2}{dt} + R_2I_2 = 0 \quad (1.1) \end{cases}$$

(2) 二次側の微分方程式の両辺にMを掛けると、

$$M^2\frac{dI_1}{dt}+ML_2\frac{dI_2}{dt}+R_2MI_2=0$$

$$L_1L_2\frac{dI_1}{dt}+ML_2\frac{dI_2}{dt}+R_2MI_2=0$$

$$\therefore L_2\left(L_1\frac{dI_1}{dt}+M\frac{dI_2}{dt}\right)+R_2MI_2=0$$

一次側の方程式より $L_1\frac{dI_1}{dt}+M\frac{dI_2}{dt}=E-R_1I_1$ なのでこれを代入して、

$$L_2(E-R_1I_1)+R_2MI_2=0$$

$$\therefore I_2=\frac{L_2}{R_2M}(R_1I_1-E)$$

(3) (2)の結果を(1)の一次回路の微分方程式に代入して、

$$L_1\frac{dI_1}{dt}+M\frac{d}{dt}\left\{\frac{L_2}{R_2M}(R_1I_1-E)\right\}+R_1I_1=E$$

$$\left(L_1+\frac{R_1L_2}{R_2}\right)\frac{dI_1}{dt}=E-R_1I_1$$

$$\therefore \frac{dI_1}{dt}=-\frac{R_1R_2}{R_1L_2+R_2L_1}I_1+\frac{R_2E}{R_1L_2+R_2L_1}$$

(4) $\frac{dy}{dx}=\alpha y+\beta$ の一般解は $y=\frac{1}{\alpha}\left(Ae^{\alpha t}-\beta\right)$ である。これを利用して(3)の式を解くと、

$$I_1=-\frac{R_1L_2+R_2L_1}{R_1R_2}\left(Ae^{-\frac{R_1R_2}{R_1L_2+R_2L_1}t}-\frac{R_2E}{R_1L_2+R_2L_1}\right)$$

$t=0$ で $I_1=0$ となることから定数 A を求めると、$A=\frac{R_2E}{R_1L_2+R_2L_1}$ となる。

よって

$$I_1=-\frac{E}{R_1}\left(e^{-\frac{R_1R_2}{R_1L_2+R_2L_1}t}-1\right) \quad (1.2)$$

(5)二次回路に関する回路方程式(1.1)について積分すると

$$M\int_0^\infty\frac{dI_1}{dt}dt+L_2\int_0^\infty\frac{dI_2}{dt}dt+R_2\int_0^\infty I_2dt$$

$$=M\left[I_1\right]_0^\infty+L_2\left[I_2\right]_0^\infty+R_2\int_0^\infty I_2dt$$

$$=M\left(I_{1(\infty)}-I_{1(0)}\right)+L_2\left(I_2(\infty)-I_2(0)\right)+R_2\int_0^\infty I_2dt=0 \quad (1.3)$$

となる。ここで一次回路に流れる電流I_1について考えると式(1.2)より、スイッチSを閉じた瞬間(t=0)は電流が流れておらず($I_1=0$)、またt=∞では $I_1=\frac{E}{R_1}$ である。また、一次回路に関してはスイッチSを閉じた瞬間(t=0)は

電流が流れておらず($I_2 = 0$)、t=∞では電流I_1 が一定になり二次回路には起電力がないため$I_2 = 0$となる。以上より、式(1.3)は

$$M\left(I_1(\infty)-I_1(0)\right)+L_2\left(I_2(\infty)-I_2(0)\right)+R_2\int_0^{\infty} I_2 dt$$

$$= M\frac{E}{R_1}+R_2\int_0^{\infty} I_2 dt = 0$$

よって二次回路に流れる電流の総量$\int_0^{\infty} I_2 dt$ は

$$\left|\int_0^{\infty} I_2 dt\right| = \frac{ME}{R_1 R_2}$$