電磁気学 B 演習　第 10 回　解答（暫定版）

1

微分形	積分形	物理的意味
$\nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{d\mathbf{B}}{dt}$	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\dfrac{d\Phi}{dt}$	閉回路に鎖交する磁束が時間的に変化すると起電力が磁束の変化を妨げる向きに生ずる
$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{d\mathbf{E}}{dt}$	$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{d}{dt} \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$	電流が流れるか、または電束が時間的に変化すると磁界が発生する
$\nabla \cdot \mathbf{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$	電束密度の面積分が全電荷量を表す
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$	真磁荷の非存在

2

マクスウェルの方程式より

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial y} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \Rightarrow -\frac{\partial B_x}{\partial y} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_Z}{\partial t}$$

これらに

$$E_z = E_0 \sin\left(\frac{2\pi y}{\lambda} - \omega t\right), B_x = B_0 \sin\left(\frac{2\pi y}{\lambda} - \omega t\right)$$

を代入すると

$$E_0 \frac{2\pi}{\lambda} \cos\left(\frac{2\pi y}{\lambda} - \omega t\right) = \omega B_0 \cos\left(\frac{2\pi y}{\lambda} - \omega t\right) \Rightarrow E_0 \frac{2\pi}{\lambda} = \omega B_0 \qquad (4.1)$$

$$-B_0 \frac{2\pi}{\lambda} \cos\left(\frac{2\pi y}{\lambda} - \omega t\right) = -\mu_0 \varepsilon_0 \omega E_0 \cos\left(\frac{2\pi y}{\lambda} - \omega t\right) \Rightarrow \lambda \mu_0 \varepsilon_0 \omega E_0 = 2\pi B_0$$

(4.2)

式(4.1)より

$$\frac{E_0}{B_0} = \frac{\omega \lambda}{2\pi} = C$$

これを式(4.2)に代入すると

$$\left(\frac{\omega\lambda}{2\pi}\right)^2 \mu_0\varepsilon_0 = 1 \rightarrow c^2\mu_0\varepsilon_0 = 1$$

以上より、$\dfrac{E_0}{B_0} = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = C$ (光速)

3

（１）$\nu = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{2\pi\times10^8}{2\pi} = 10^8\left[s^{-1}\right]$

（２）$\lambda = \dfrac{2\pi}{k} = \dfrac{2\pi}{{}^2\!/_3\,\pi} = 3[m]$

（３）ｘ軸の正方向に進む

（４）ｘ軸方向、ｙ軸方向、ｚ軸方向の単位ベクトルをそれぞれｉ、ｊ、ｋとすると、電場Ｅと磁場Ｂは互いに垂直であり、それらの外積方向が波の伝播方向なので、

$$\boldsymbol{j}\times\frac{\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{B}|} = \boldsymbol{i} \qquad \therefore \frac{\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{B}|} = \boldsymbol{k}$$

よってＢはｚ軸方向。

4

（i） $\nabla\times\boldsymbol{B} = \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$ が成り立つ条件を考える。

$$\nabla\times\boldsymbol{B} = \hat{\boldsymbol{x}}\left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right) = \hat{\boldsymbol{x}}B_0\left(k^2\frac{a}{\pi} + \frac{\pi}{a}\right)\sin\frac{\pi z}{a}\cos(ky-\omega t)$$

$$= \hat{\boldsymbol{x}}B_0\frac{a}{\pi}\left(k^2 + \frac{\pi^2}{a^2}\right)\sin\frac{\pi z}{a}\cos(ky-\omega t)$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} = \hat{\boldsymbol{x}}B_0\omega^2\frac{a}{\pi}\sin\frac{\pi z}{a}\cos(ky-\omega t)$$

$\therefore\ \dfrac{\omega^2}{c^2} = k^2 + \dfrac{\pi^2}{a^2}$　すなわち，$\omega = c\sqrt{k^2 + \dfrac{\pi^2}{a^2}}$.

（ii） 表 8-4 の境界条件：$B_{2t} - B_{1t} = \mu_0 j_\perp$，$B_{1t} = 0$ を用いて

$$\frac{1}{\mu_0}B_y\Big|_{z=0} = \frac{B_0}{\mu_0}\cos(ky-\omega t) = j_\perp, \qquad \boldsymbol{j} = -\hat{\boldsymbol{x}}\frac{B_0}{\mu_0}\cos(ky-\omega t)$$

$$E_{2n} - E_{1n} = \varepsilon_0^{-1}\sigma_t \qquad \therefore\ E_{2n} = E_{1n} = 0 \qquad \therefore\ \sigma_t = 0$$

5

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = \frac{B_0}{a}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(-y) + \frac{\partial}{\partial z}(0)\right] = 0$$

$$\nabla\times\mathbf{B}=\frac{B_0}{a}\left[\left(\frac{\partial}{\partial y}(0)-\frac{\partial}{\partial z}(-y)\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial}{\partial z}(x)-\frac{\partial}{\partial x}(0)\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial}{\partial x}(-y)-\frac{\partial}{\partial y}(x)\right)\mathbf{k}\right]=0$$

すなわち、伝導電流密度なし、かつ変位電流なしとなる。