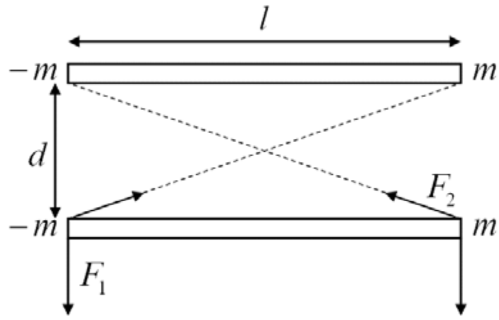
電磁気学 B 演習　第 09 回解答

1. 対称性により、磁軸に垂直な方向の成分だけとなる。



斥力：$F_1 = 2 \cdot \dfrac{1}{4\pi\mu_0}\dfrac{m^2}{d^2}$

引力：$F_2 = -2 \cdot \dfrac{1}{4\pi\mu_0}\dfrac{m^2}{l^2+d^2}\dfrac{d^2}{\sqrt{l^2+d^2}}$

合成力：$F = F_1 + F_2 = \dfrac{m^2}{2\pi\mu_0}\left\{\dfrac{1}{d^2} - \dfrac{d}{\left(l^2+d^2\right)^{3/2}}\right\}$

$F > 0$であるから、働く力は斥力となる。

2. 磁気双極子の 2 磁荷$\pm m$の中点 O から$r(>> l)$の変位をした点 P での磁位ϕ_mは、電気双極子の場合同様にして

$$\phi_m = \frac{\mathbf{M}\cdot\mathbf{r}}{4\pi\mu_0 r^3} = \frac{M}{4\pi\mu_0 r^2}\cos\theta$$

ここに$\mathbf{M}$は磁気双極子モーメント、θは$\mathbf{M}$から$\mathbf{r}$の方向への角である。O を原点とし、$\mathbf{M}$方向を基線とする極座標をとると、点(r,θ)での磁界$\mathbf{H}$の成分は

$$H_r = -\frac{\partial\phi_m}{\partial r} = \frac{M}{2\pi\mu_0 r^3}\cos\theta$$

$$H_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\phi_m}{\partial\theta} = \frac{M}{4\pi\mu_0 r^3}\sin\theta$$

磁軸に平行な方向に磁界の成分をH_xとすると

$$H_x = H_r\cos\theta - H_\theta\sin\theta = \frac{M}{4\pi\mu_0 r^3}\left(2\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) = \frac{M}{4\pi\mu_0 r^3}\left(3\cos^2\theta - 1\right)$$

$H_x = 0$より、$3\cos^2\theta - 1 = 0$であるから

$$\cos\theta = \pm 1/\sqrt{3}$$

したがって

$$\theta = \pm\cos^{-1}\left(\pm 1/\sqrt{3}\right)$$

3. 磁場は二枚の平面間の領域だけにあって、アンペールの法則よりその大きさは$B=\mu_0 J$である。両平面上の単位面積の正方形を底面とする角柱を考えるとその内部に分布する磁場のエネルギーは

$$U=\frac{1}{2\mu_0}B^2 l=\frac{1}{2}J\Phi$$

である。ここで$\Phi=Bl$はこの領域を通過する磁束を表す。平面の単位面積にはたらく力Fを求めるため一方の平面をδlだけ仮想的に変位させる。Fと釣り合うように加えている外力$-F$が行う仕事は$-F\delta l$であるから、仮想仕事の式

$$\delta U=-F\delta l$$

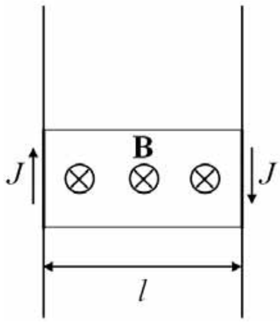
が成り立つ。$\Phi=$一定の条件の下でのUの変化は

$$\delta U=\delta\left(\frac{\Phi^2}{2\mu_0 l}\right)=-\frac{\Phi^2}{2\mu_0 l^2}\delta l=-\frac{B^2}{2\mu_0}\delta l$$

であるから、単位面積当たり

$$F=\frac{B^2}{2\mu_0}=\frac{1}{2}\mu_0 J^2$$

の斥力がはたらくことがわかる。



4. 起磁力は

$$V_m=NI$$

磁気抵抗は

$$R_m=\frac{\delta}{\mu_0 S_0}+\frac{l}{\mu S}$$

磁束がもれないとき、鉄心内に生ずる磁束$\Phi=E_m/R_m$が空隙部の磁束Φ_0になるから

$$\Phi_0=\Phi=\frac{V_m}{R_m}=\frac{NI}{\dfrac{\delta}{\mu_0 S_0}+\dfrac{l}{\mu S}}$$

$$B_0=\frac{\Phi_0}{S_0}=\frac{NI}{\dfrac{\delta}{\mu_0}+\dfrac{l}{\mu}\dfrac{S_0}{S}}$$

5. 磁気抵抗を R_m、磁束を Φ、磁束密度を B とすると

$$\begin{cases} R_m = \dfrac{l_1}{\mu_1 S_1} + 2\dfrac{\delta}{\mu_0 S_1} + \dfrac{l_2}{\mu_2 S_2} \\ \Phi = \dfrac{NI}{R_m} = NI \Big/ \left(\dfrac{l_1}{\mu_1 S_1} + 2\dfrac{\delta}{\mu_0 S_1} + \dfrac{l_2}{\mu_2 S_2} \right) \\ B = \dfrac{\Phi}{S_1} = NI \Big/ \left(\dfrac{l_1}{\mu_1} + 2\dfrac{\delta}{\mu_0} + \dfrac{l_2}{\mu_2}\dfrac{S_1}{S_2} \right) \end{cases}$$

隙間のエネルギーは

$$U = \frac{B^2}{2\mu_0}(S_1\delta)$$

となる。またエネルギーと力の間には $F = -\dfrac{dU}{dx}$ という関係が成り立つので鉄片を吸引する力は

$$F = -\frac{dU}{d\delta} = -\frac{B^2}{2\mu_0}S_1$$
$$= -\frac{N^2 I^2 S_1}{2\mu_0} \Big/ \left(\frac{l_1}{\mu_1} + 2\frac{\delta}{\mu_0} + \frac{l_2}{\mu_2}\frac{S_1}{S_2} \right)^2$$