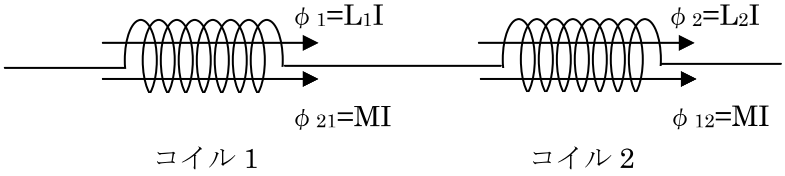
電磁気学 B 演習　第 8 回解答

1. 二つのコイルが同じ向きで直列に接続されている場合、各コイルに鎖交する磁束は以下のようになる。ただし ϕ_1、ϕ_2は各コイルの自己インダクタンスによる磁束で、ϕ_{21}(ϕ_{12})はコイル 2(1)がコイル 1(2)に作る磁束である。



上図よりコイル 1 全体の磁束 $\phi_{1,total}$、コイル 2 全体の磁束 $\phi_{2,total}$は

$$\phi_{1,total} = \phi_1 + \phi_{21} = (L_1 + M)I$$

$$\phi_{2,total} = \phi_2 + \phi_{12} = (L_2 + M)I$$

となる。よって二つのコイルに蓄えられる全エネルギーは、

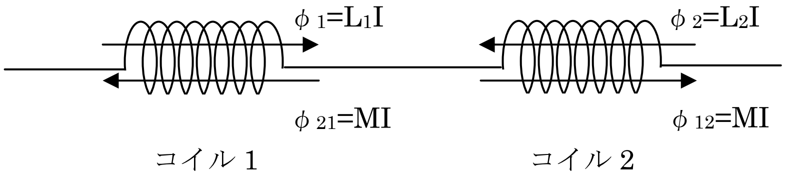
$$E = \frac{1}{2}\phi_{1,total} I + \frac{1}{2}\phi_{2,total} I = \frac{1}{2}(L_1 + L_2 + 2M)I^2$$

と求まる。全体のインダクタンスを L とすると、全エネルギーは $\frac{1}{2}LI^2$ と書けるので、上式との対応により、全体のインダクタンスは

$$L = L_1 + L_2 + 2M$$

となる。

二つのコイルが逆向きに接続された場合、各コイルに鎖交する磁束は以下のようになる。



上図よりコイル 1 全体の磁束 $\phi_{1,total}$、コイル 2 全体の磁束 $\phi_{2,total}$は

$$\phi_{1,total} = \phi_1 + \phi_{21} = (L_1 - M)I$$

$$\phi_{2,total} = \phi_2 + \phi_{12} = (L_2 - M)I$$

となる。よって二つのコイルに蓄えられる全エネルギーは、

$$E = \frac{1}{2}\phi_{1,total} I + \frac{1}{2}\phi_{2,total} I = \frac{1}{2}(L_1 + L_2 - 2M)I^2$$

と求まる。全体のインダクタンスを L とすると、全エネルギーは $\frac{1}{2}LI^2$ と書けるので、上式との対応により、全体のインダクタンスは

$$L = L_1 + L_2 - 2M$$

となる。

コイル 1 に I_1、コイル 2 に I_2 の電流が流れているとすると、系の全エネルギーは

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + MI_1 I_2 \\ &= \frac{1}{2}\left(L_1 I_1^2 + L_2 I_2^2 + 2MI_1 I_2\right) \\ &= \frac{1}{2}I_1^2\left\{L_2\left(\frac{I_2}{I_1}\right)^2 + 2M\left(\frac{I_2}{I_1}\right) + L_1\right\} \end{aligned}$$

である。$\frac{I_2}{I_1} = t$ とおくと、$E = \frac{1}{2}I_1^2\left(L_1 t^2 + 2Mt + L_1\right)$ となる。系のエネルギーは常に正であるので、$E \geq 0$ とならなければならない。すなわち $L_1 t^2 + 2Mt + L_1 \geq 0$ となるべきである。これは判別式 $D = (2M)^2 - 4L_1 L_2 = 4\left(M^2 - L_1 L_2\right)$ が負になることと等価なので、

$$D = 4\left(M^2 - L_1 L_2\right) \leq 0$$

$$\therefore M \leq \sqrt{L_1 L_2}$$

2. 各コイルに流れる電流を I_1，I_2 とすればそれぞれのコイルを貫く磁束は、

$$\phi_1 = B_1 S_1 = \mu_0 \frac{N}{l} I_1 \cdot \pi R_1^2 = \mu_0 \frac{N}{l}\pi R_1^2 I_1$$

$$\phi_2 = B_2 S_2 = \mu_0 \frac{N}{l} I_2 \cdot \pi R_2^2 = \mu_0 \frac{N}{l}\pi R_2^2 I_2$$

となる。よって鎖交磁束は

$$\Phi_1 = N\phi_1 = \mu_0 \frac{N^2}{l}\pi R_1{}^2 I_1{}^2,\ \Phi_2 = \mu_0 \frac{N^2}{l}\pi R_2{}^2 I_2{}^2$$

である。自己インダクタンスは$L = \dfrac{\Phi}{I}$なので、各コイルの自己インダクタンスは、

$$L_1 = \frac{\Phi_1}{I_1} = \mu_0 \frac{N^2}{l}\pi R_1{}^2,\ L_2 = \frac{\Phi_2}{I_2} = \mu_0 \frac{N^2}{l}\pi R_2{}^2$$

となる。またコイル 2 に電流 I を流した場合にコイル 1 に鎖交する磁束は

$$\Phi_{21} = \phi_{21} N = B_2 S_2 N = \mu_0 \frac{N^2}{l}\pi R_2{}^2 I^2$$

なので、相互インダクタンスは

$$M = \frac{\Phi_{21}}{I} = \mu_0 \frac{N^2}{l}\pi R_2{}^2$$

と求まる。

2 次回路に流れる電流を I_1、I_2 とすると、コイル 1 およびコイル 2 の両端の電圧は

$$e_1 = L_1 \frac{dI_1}{dt} + M\frac{dI_2}{dt},\ e_2 = L_2\frac{dI_2}{dt} + M\frac{dI_1}{dt}$$

となるので、微分方程式は

$$L_1 \frac{dI_1}{dt} + M\frac{dI_2}{dt} = V_0 \cos\omega t,\ L_2\frac{dI_2}{dt} + M\frac{dI_1}{dt} + RI_2 = 0$$

すなわち、

$$\mu_0 \frac{N^2}{l}\pi R_1{}^2 \frac{dI_1}{dt} + \mu_0 \frac{N^2}{l}\pi R_2{}^2 \frac{dI_2}{dt} = V_0 \cos\omega t$$

$$\mu_0 \frac{N^2}{l}\pi R_2{}^2 \frac{dI_1}{dt} + \mu_0 \frac{N^2}{l}\pi R_2{}^2 \frac{dI_2}{dt} = -RI_2$$

となる。

3. 下側の長方形回路に電流 I が流れていると仮定し、上側の長方形回路における幅 dx の帯状部分を考える。下側長方形の辺 ab と辺 cd の部分に流れる電流が帯状部分に作る磁束は、大きさが同じで向きが逆なので互いに打ち消しあう。よって辺 bc と辺 da による寄与のみを考えればよい。辺 da および辺 bc の部分に流れる電流が帯の位置に作る磁束密度は、それぞれ

$$B_{da} = \frac{\mu_0 I}{2\pi(x+d)},\ B_{bc} = \frac{\mu_0 I}{2\pi(x+d+b)}$$

となる。これらは方向が逆なので、帯状部分を貫く磁束は

$$d\phi = (B_{da} - B_{bc})S = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\left(\frac{1}{x+d} - \frac{1}{x+d+b}\right)dx$$

従って、下側長方形回路により上側長方形回路内に発生する磁束は、

$$\begin{aligned}\phi &= \int_0^b d\phi \\ &= \frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\int_0^b\left(\frac{1}{x+d} - \frac{1}{x+d+b}\right)dx \\ &= \frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\left(\log\frac{d+b}{d+2b} - \log\frac{d}{d+b}\right) \\ &= \frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\log\frac{(d+b)^2}{d(d+2b)}\end{aligned}$$

となる。ここで $b >> d$ より、

$$\phi \approx \frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\log\frac{b}{2d}$$

となる。よって相互インダクタンスは

$$M = \frac{\phi}{I} = \frac{\mu_0 a}{2\pi}\log\frac{b}{2d}$$

と求まる。

次に回路間に働く力であるが、2 つの長方形回路にそれぞれ電流 I_1、I_2 が流れている場合、系の全エネルギーは

$$E = \frac{1}{2}L_1 I_1{}^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2{}^2 + MI_1 I_2$$

と書ける。回路間に働く力 F は $F = -\frac{\partial E}{\partial d}$ で求まるが、L_1 と L_2 は d に依存しないので、

$$F = \frac{\partial E}{\partial d} = I_1 I_2 \frac{\partial M}{\partial d} = -\frac{\mu_0 a}{2\pi d} I_1 I_2$$

となる。

4. 両導線によって発生する磁束は全て導線間の領域を通過する。よって単位長さ当たりの導線間領域を貫く磁束を求めて電流 I で割れば、外部インダクタンスを求めることができる。

今、導線間の幅 dx の帯状部分を考える。この部分に導線が作る磁束密度は、

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi(d-x)} + \frac{\mu_0 I}{2\pi x} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{d-x} + \frac{1}{x}\right)$$

となる。よって単位長さ当たりの導線間領域を貫く磁束は、

$$
\begin{aligned}
\phi &= \int_0^{d-a} B dx \\
&= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_a^{d-a} \left(\frac{1}{d-x} + \frac{1}{x} \right) dx
\end{aligned}
$$

と求まる。よって単位長さ当たりの外部インダクタンスは、

$$
\begin{aligned}
L_{外} &= \frac{\phi}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi} \log \frac{(d-a)^2}{a^2} = \frac{\mu_0}{\pi} \log \frac{d-a}{a} \\
&= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\log \frac{d-a}{a} - \log \frac{a}{d-a} \right) \\
&= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \log \frac{(d-a)^2}{a^2}
\end{aligned}
$$

となる。

一方単位長さ当たりの内部インダクタンスは、

$$
L_{内} = 2 \cdot \frac{\mu_0}{8\pi} = \frac{\mu_0}{4\pi}
$$

となる。