電磁気学 B 演習　第 4 回解答

1. Biot-Savart の法則 $\mathbf{B}=\dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\int d\mathbf{r}\times\dfrac{\mathbf{R}}{R^3}$ において

$$d\mathbf{r}=ad\phi\mathbf{e}_\phi$$

$$\mathbf{R}=z\mathbf{e}_\mathbf{z}-a\mathbf{e}_\rho, R^2=a^2+z^2$$

$$d\mathbf{r}\times\mathbf{R}=ad\phi(z\mathbf{e}_\phi\times\mathbf{e}_\mathbf{z}-a\mathbf{e}_\phi\times\mathbf{e}_\rho)=ad\phi(z\mathbf{e}_\rho+a\mathbf{e}_\mathbf{z})$$

である。$\mathbf{e}_\rho$ 方向の磁場は回転対称性により、z 軸上では消えるので $\rho=0$ において

$$\mathbf{B}(z)=\frac{\mu_0 I}{4\pi}a^2\mathbf{e}_\mathbf{z}\int_0^{2\pi}\frac{d\phi}{\left(a^2+z^2\right)^{3/2}}=\frac{\mu_0 Ia^2}{2\left(a^2+z^2\right)^{3/2}}\mathbf{e}_\mathbf{z}$$

となる。z 軸の近くでは $B_z\approx B_z(\rho=0)$ として差し支えない。$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$ と円柱対称性 $\dfrac{\partial B_\phi}{\partial\phi}=0$ により

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho B_\rho)+\frac{\partial B_z}{\partial z}=0$$

より

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho B_\rho)=-\frac{\partial B_z}{\partial z}=\frac{3\mu_0 Ia^2 z}{2\left(a^2+z^2\right)^{5/2}}$$

したがって

$$B_\rho=\frac{3\mu_0 Ia^2 z\rho}{4\left(a^2+z^2\right)^{5/2}}$$

2. アンペアの周回積分の法則を用いてとく。

i) $c<r$ の場合

半径 r の仮想閉曲線 c の面内を通る電流は

$$I_t=I-I=0$$

よってアンペアの周回積分の法則により

$$\oint_c \frac{B}{\mu_0} dl = 0$$

閉曲線上で B は一様であり、また、$\oint_c dl = 2\pi r$ は 0 でないことから、$B = 0$ となる。

ii) $b < r \leq c$ の場合

半径 r の仮想閉曲線 c の面内を通る電流を It とすると、

$$I_t = I - \frac{\pi\left(r^2 - b^2\right)}{\pi\left(r^2 - c^2\right)} I = \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} I$$

したがって、アンペアの周回積分の法則より、

$$\oint_c \frac{B}{\mu_0} dl = I_t = \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} I$$

閉曲線上で B は一様であることと $\oint_c dl = 2\pi r$ を考慮すると、

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2}$$

iii) $a < r \leq b$ の場合

半径 r の仮想閉曲線 c の面内を通る電流は I であるので

$$\oint_c \frac{B}{\mu_0} dl = I$$

よって

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

iv) $0 \leq r \leq a$ の場合

半径rの仮想閉曲線cを描くと、この閉曲線の面内を通る電流I_tは

$$I_t = \frac{\pi r^2}{\pi a^2} I = \frac{r^2}{a^2} I$$

よってアンペアの周回積分の法則により

$$\oint_c \frac{B}{\mu_0} dl = I_t = \frac{r^2}{a^2} I$$

閉曲線上の B は一様であることと $\oint_c dl = 2\pi r$ を考慮すると、

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}$$

3. 巻数 1 のコイルの半径をr_1、巻数Nのコイルの半径をr_Nとする。半径aの 1 巻きコイルの中心における磁場は

$$B=\frac{\mu_0 I}{2a}$$

と求まる。よってB_1、B_Nは以下のように求まる。ただし、B_NにおいてはN巻きなので電流はNIとなる。

$$B_1=\frac{\mu_0 I}{2r_1}, B_N=\frac{\mu_0 NI}{2r_N} \tag{1}$$

また、導線の長さは普遍なので

$$2\pi r_1 = N 2\pi r_N$$

$$\therefore r_N=\frac{r_1}{N} \tag{2}$$

式(2)を式(1)に代入すると

$$B_N=\frac{\mu_0 NI}{2r_1/N}=N^2\frac{\mu_0 I}{2r_1}$$

よって

$$B_N=N^2 B_1$$

4. (1) 図のような線電流を考える。点 P から AB に下ろした垂線の足を点 H、AB 上の点 Q のところの線要素を ds、$\mathrm{OQ}=s$、$\mathrm{PQ}=r$、$\angle\mathrm{PQA}=\theta$ とすると

$$r=\frac{\ell}{\sin(\pi-\theta)}=\frac{\ell}{\sin\theta}、\ s=\ell\cot(\pi-\theta)=-\ell\cot\theta、\ ds=\frac{\ell}{\sin^2\theta}d\theta$$

であるから、Ids によって P に生じる磁場 dB は Biot-Savart の法則により

$$dB=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{ds\sin\theta}{r^2}=\frac{I}{4\pi\ell}\sin\theta d\theta$$

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi\ell}\int_{\theta_2}^{\pi-\theta_1}\sin\theta d\theta=\frac{\mu_0 I}{4\pi\ell}\left[-\cos\theta\right]_{\theta_2}^{\pi-\theta_1}=\frac{\mu_0 I}{4\pi\ell}\left(\cos\theta_1+\cos\theta_2\right)$$

無限に長い線電流の場合は、$\theta_1=\theta_2=0$ であるから、

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi\ell}$$

(2) 図 P のようなソレノイドを考える。点 P より軸に沿って x の距離のところの長さ dx の部分の電流のアンペア回数は $Indx$ である。その部分が点 P に生ずる磁界を dB とする。θ, r を図のように定めると $x=a\cot\theta$ より

$$dx = -\frac{a}{\sin^2\theta}d\theta = -\frac{r}{\sin\theta}d\theta$$

問 1 の結果を用いて、

$$dB = \frac{\mu_0 a^2 Indx}{2\left(a^2 + x^2\right)^{3/2}} = \frac{\mu_0 nI\sin^2\theta}{2r}dx = -\frac{\mu_0 nI}{2}\sin\theta d\theta$$

$$B = -\frac{\mu_0 nI}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta d\theta = \frac{\mu_0 nI}{2}\left(\cos\theta_2 - \cos\theta_1\right)$$

無限に長いソレノイドの場合は、$\theta_1 = 0$、$\theta_2 = \pi$ であるから、

$$B = \mu_0 nI$$

向きを無視したので、符号をつけなかった。