電磁気学要論　演習

第 10 回　解答

1.

微小電荷 dQ から距離 r だけ離れた点の電位は

$$d\phi = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

ここで

$$dQ = \lambda \cdot a d\varphi, r = \left(a^2 + x^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

であるから

$$d\phi = \frac{a\lambda d\varphi}{4\pi\varepsilon_0 \left(a^2 + x^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\phi = \int_0^{2\pi} \frac{a\lambda d\varphi}{4\pi\varepsilon_0 \left(a^2 + x^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{a\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2\pi}{\left(a^2 + x^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{a\lambda}{2\varepsilon_0 \left(a^2 + x^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

よって

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi$$

$$\therefore E = -\frac{\partial\phi}{\partial x}$$

$$= \frac{a\lambda}{2\varepsilon_0} \frac{1}{\left(a^2 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

2.

電界は針金を軸とした円筒側面に垂直なので

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E \cdot 2\pi a \cdot 1 = \frac{\lambda \cdot 1}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}$$

よって

$$\therefore F = QE$$

$$= \frac{Q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}$$

3.

対称性より電界は平面に垂直な方向に平行である。平面の両側に対照的にまたがる底面積 dS の柱筒を考える．その側面では $E_n = 0$ であるが底面での電界を E とすると、電界は底面に垂直であるからそこでは $E = E_n$ となる．柱筒内の電荷は σdS であるから、その柱筒面に Gauss の定理を適用すると

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E \cdot 2dS = \frac{\sigma dS}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

4.

(ｉ)外部の場合 $(r > a)$

円柱外部に半径 r の単位長さの同軸円筒を考える．電界は側面に垂直で、側面積は $2\pi r$ だからガウスの法則より

$$2\pi r \cdot E = \frac{\lambda}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

（ⅱ）内部の場合$(r < a)$

円柱内部に半径rの単位長さの同軸円筒を考える．同軸円筒内に含まれる電荷は

$$\lambda\frac{\pi r^2\cdot 1}{\pi a^2\cdot 1}=\frac{r^2}{a^2}\lambda$$

だから、ガウスの法則より

$$2\pi r\cdot E=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{r^2}{a^2}\lambda$$

$$\therefore E=\frac{\lambda r}{2\pi\varepsilon_0 a^2}$$

５．電荷密度は、$\rho=\frac{Q}{S}=\frac{500\pi\times 10^{-6}}{25\pi}=2.0\times 10^{-5}$ $[C/m^2]$である。

このとき、円盤状の微小領域dSのもつ電荷dQは$dQ=\rho dS=\rho r dr d\phi$であり、(0,0,5)の点電荷はq＝50[$\mu C$]である。また、微小領域$dS$から(0,0,5)の点電荷に向かうベクトルを$\mathbf{R}$とすると、$\mathbf{R}=-r\mathbf{a}_r+5\mathbf{a}_z$ (円柱座標系で考える)である。

以上から、その点電荷にかかる微小な力$d\mathbf{F}$は、

$$d\mathbf{F}=\frac{q dQ}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cdot\frac{\mathbf{R}}{R}=\frac{\left(50\times 10^{-6}\right)\left(\rho r dr d\phi\right)}{4\pi\varepsilon_0\left(r^2+25\right)^2}\cdot\left(\frac{-r\mathbf{a}_\mathbf{r}+5\mathbf{a}_z}{\sqrt{r^2+25}}\right)$$

となる。円盤の対称性より$\mathbf{a}_r$方向の成分は相殺され、ｚ軸方向成分だけが残る。よって、求める力は、

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}&=\int_0^{2\pi}\int_0^5\frac{\left(50\times 10^{-6}\right)\left(2.0\times 10^{-5}\right)r dr d\phi}{4\pi\varepsilon_0\left(r^2+25\right)}\cdot\frac{5}{\sqrt{r^2+25}}\mathbf{a}_\mathbf{z}\\
&=\int_0^{2\pi}\int_0^5\frac{\left(50\times 10^{-6}\right)\left(2.0\times 10^{-5}\right)5r}{4\pi\varepsilon_0\left(r^2+25\right)^{\frac{3}{2}}}dr d\phi\mathbf{a}_\mathbf{z}\\
&=\frac{50\times 10^{-10}}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^5\frac{r}{\left(r^2+25\right)^{\frac{3}{2}}}dr d\phi\mathbf{a}_\mathbf{z}\\
&=\frac{25\times 10^{-10}}{\varepsilon_0}\int_0^5\frac{r}{\left(r^2+25\right)^{\frac{3}{2}}}dr\mathbf{a}_\mathbf{z}\\
&=\frac{25\times 10^{-10}}{\varepsilon_0}\left[\frac{-1}{\sqrt{r^2+25}}\right]_0^5\mathbf{a}_\mathbf{z}=\frac{5\times 10^{-10}}{\varepsilon_0}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{a}_\mathbf{z}
\end{aligned}$$