電磁気学要論　演習

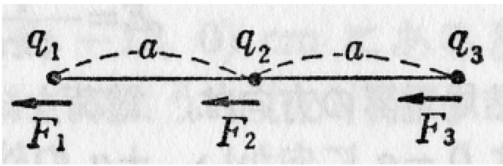
第 9 回　解答

1. (i) q_1, q_2, q_3 に作用する力を F_1, F_2, F_3 とし、値が正のときを下図の矢印の方向とすると

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{a^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_3}{(2a)^2} = \frac{q_1}{16\pi\varepsilon_0 a^2}(4q_2 + q_3)[N]$$

$$F_2 = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{a^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2 q_3}{(a)^2} = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}(q_3 - q_1)[N]$$

$$F_3 = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_3}{(2a)^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2 q_3}{a^2} = -\frac{q_3}{16\pi\varepsilon_0 a^2}(q_1 + 4q_2)[N]$$



(ii) 3 電荷がつりあうためには $F_1 = F_2 = F_3 = 0$ の値をとらないといけないので、

$$4q_2 + q_3 = 0,\quad q_3 - q_1 = 0,\quad q_1 + 4q_2 = 0$$

これより $q_1 : q_2 : q_3 = 4 : -1 : 4$

2.　(i)　両電荷の中間では、電界は下図(a)の左方に

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{(l-x)^2} + \frac{q}{(l+x)^2}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2(l^2+x^2)}{(l^2-x^2)^2}$$

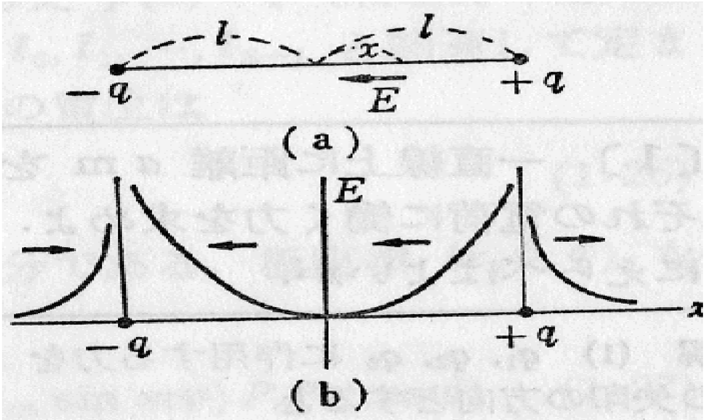
q の外側では、図(a)の右方に

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{(x-l)^2} + \frac{q}{(x+l)^2}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4xl}{(x^2-l^2)^2}$$

$-q$ の外側では、図(a)の右方に、同様に

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4xl}{(x^2-l^2)^2}$$

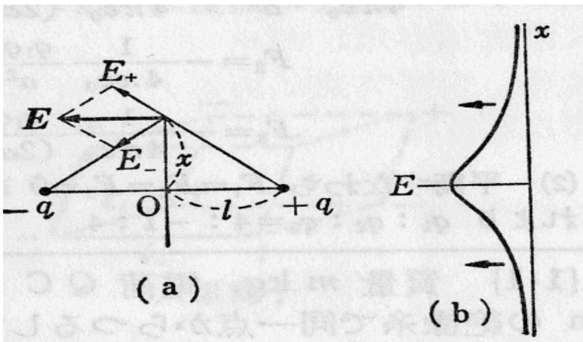
結局電界の方向は、電荷を結ぶ線分に平行で、中間では $+q$ より $-q$ に向かい、$+q$ の外側では外側に、$-q$ の外側では内側に向かう。図(b)は x による電界の分布で、矢印はその方向を示す。



(ii) E_+ , E_- を $+q$, $-q$ による電界とすると

$$E = E_+ \frac{2l}{(x^2 + l^2)^{1/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{x^2 + l^2} \frac{2l}{(x^2 + l^2)^{1/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2ql}{(x^2 + l^2)^{3/2}}$$

方向は電荷を結ぶ線分に平行で $+q$ から $-q$ に向かう。図(c)は電界の分布で、矢印はその方向を示す。



3. 点 A での電位を V_A とすると、

$$V_A = -\int_{\infty}^{r_A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{\infty}^{r_A} \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = -\left[-\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 r} \right]_{\infty}^{r_A} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r_A}$$

無限遠から点 A まで運ぶための仕事 W は

$$W = 4qV_A = \frac{2q^2}{\pi\varepsilon_0 r_A}$$

点 B での電位を V_B とすると、同様に

$$V_B = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r_B}$$

電荷 $4q$ を点 A から点 B まで運ぶための仕事 W は

$$\therefore W = 4q(V_B - V_A) = \frac{2q^2}{\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$

4. (i) P_1からP_2に至るベクトルを$\boldsymbol{r}$とすると、$\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 10\boldsymbol{k}) - (\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}) = 7\boldsymbol{k}$ となる。クーロンの法則より、q_1によってq_2が受ける力$\boldsymbol{F}$は

$$\boldsymbol{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 |\boldsymbol{r}|^3}\boldsymbol{r} = \frac{(10\times10^{-6})\times(-5\times10^{-6})}{4\times3.14\times(8.854\times10^{-12})\times7^3}\cdot7\boldsymbol{k} = -0.00917\boldsymbol{k}[N]$$

となる。

(ii) 点P_3の座標を(x, y, z)とおくと、P_1からP_3に至るベクトル$\boldsymbol{r}_{13}$およびP_2からP_3に至るベクトル$\boldsymbol{r}_{23}$はそれぞれ

$$\boldsymbol{r}_{13} = (\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}) - (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) = (1-x)\boldsymbol{i} + (2-y)\boldsymbol{j} + (3-z)\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{r}_{23} = (\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 10\boldsymbol{k}) - (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) = (1-x)\boldsymbol{i} + (2-y)\boldsymbol{j} + (10-z)\boldsymbol{k}$$

と書ける。よって点P_3の点電荷q_3が受ける力は

$$\boldsymbol{F} = \frac{q_1 q_3}{4\pi\varepsilon_0 |\boldsymbol{r}_{13}|^3}\boldsymbol{r}_{13} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\varepsilon_0 |\boldsymbol{r}_{23}|^3}\boldsymbol{r}_{23}$$

$$= \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{|\boldsymbol{r}_{13}|^3}\boldsymbol{r}_{13} + \frac{q_2}{|\boldsymbol{r}_{23}|^3}\boldsymbol{r}_{23}\right)$$

$$= \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\left(\frac{q_1}{|\boldsymbol{r}_{13}|^3} + \frac{q_2}{|\boldsymbol{r}_{23}|^3}\right)(1-x)\boldsymbol{i} + \left(\frac{q_1}{|\boldsymbol{r}_{13}|^3} + \frac{q_2}{|\boldsymbol{r}_{23}|^3}\right)(2-y)\boldsymbol{j} + \left(\frac{q_1}{|\boldsymbol{r}_{13}|^3}(3-z) + \frac{q_2}{|\boldsymbol{r}_{23}|^3}(10-z)\right)\boldsymbol{k}\right\}$$

となる。$\boldsymbol{F} = 0$となるには$\boldsymbol{F}$の各成分が 0 になる必要があるので、

$$\left(\frac{q_1}{|\boldsymbol{r}_{13}|^3} + \frac{q_2}{|\boldsymbol{r}_{23}|^3}\right)(1-x) = 0$$

$$\left(\frac{q_1}{|\boldsymbol{r}_{13}|^3} + \frac{q_2}{|\boldsymbol{r}_{23}|^3}\right)(2-y) = 0$$

$$\frac{q_1}{|\boldsymbol{r}_{13}|^3}(3-z) + \frac{q_2}{|\boldsymbol{r}_{23}|^3}(10-z) = 0$$

が成り立つ。ここで$\dfrac{q_1}{|\boldsymbol{r}_{13}|^3}+\dfrac{q_2}{|\boldsymbol{r}_{23}|^3}\neq 0$であるので、$x=1, y=2$となる。また

$$\frac{q_1}{|\boldsymbol{r}_{13}|^3}(3-z)+\frac{q_2}{|\boldsymbol{r}_{23}|^3}(10-z)=\frac{3-z}{|3-z|^3}\cdot 10\times 10^{-6}-\frac{10-z}{|10-z|^3}\cdot 5\times 10^{-6}=0$$

$$\therefore 2\cdot\frac{3-z}{|3-z|^3}=\frac{10-z}{|10-z|^3}$$

まず$z<3$とすると$3-z>0$、$10-z>0$より

$$\frac{2}{(3-z)^2}=\frac{1}{(10-z)^2}\Rightarrow z=17\pm 7\sqrt{2}=26.9, 7.1$$

これらの解は$z<3$を満たさないので不適切である。次に$3<z<10$とすると$3-z<0$、$10-z>0$より

$$-\frac{2}{(3-z)^2}=\frac{1}{(10-z)^2}$$

となるが、この方程式は実数解を持たない。最後に$z>10$とすると$3-z<0$、$10-z<0$より

$$\frac{2}{(3-z)^2}=\frac{1}{(10-z)^2}\Rightarrow z=17\pm 7\sqrt{2}=26.9, 7.1$$

この二つの解のうち、$z=17+7\sqrt{2}=26.9$のみが$z>10$を満たす。

以上より$z=17+7\sqrt{2}$となるので、点P_3の座標は$\left(1,2,17+7\sqrt{2}\right)$となる。