電磁気学要論　演習

第 8 回　解答

1. 線元素、面積元素、体積元素を積分することで、長さ、面積、体積が得られる。

(1) 円周

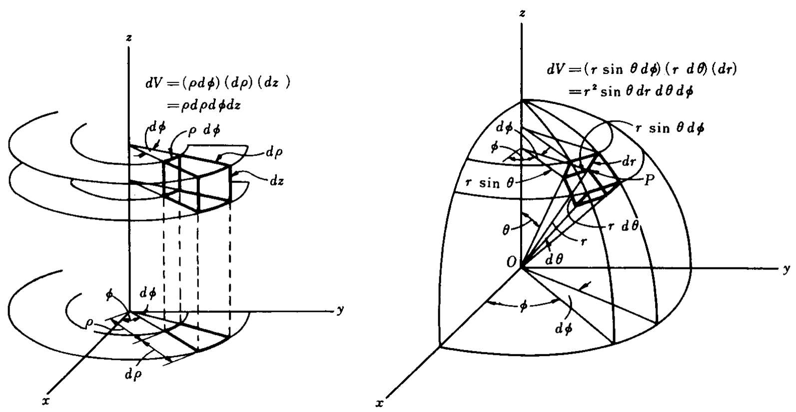
$$\int dt = \int_0^{2\pi} R d\phi = 2\pi R$$

(2) 面積

$$\int dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} R^2 \sin\theta d\theta d\phi = 4\pi R^2$$

体積

$$\int dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi = \frac{4}{3}\pi R^3$$



図(a) 円柱座標での体積要素　　図(b) 極座標での体積要素

参考図

2. 円柱座標では

$$\begin{cases} x = \rho\cos\phi \\ y = \rho\sin\phi \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} A_\rho = \cos\phi A_x + \sin\phi A_y \\ A_\phi = -\sin\phi A_x + \cos\phi A_y \\ A_z = A_z \end{cases}$$

これを用いて、

$$
\begin{cases}
A_\rho = z\cos\phi - 2\rho\cos\phi\sin\phi \\
A_\phi = -z\sin\phi - 2\rho\cos^2\phi \\
A_z = \rho\sin\phi
\end{cases}
$$

3. ガウスの発散定理を用いて、

$$
\begin{aligned}
\int \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}dS &= \int \nabla\cdot\mathbf{A}dV = \int 3\left(x^2+y^2+z^2\right)dV = \int 3rdV \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} 3r^2\ r^2\sin\theta drd\theta d\phi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} 3r^4\sin\theta\ drd\theta d\phi \\
&= \frac{12}{5}\pi R^5
\end{aligned}
$$

4. $F = x^2+y^2$ とおくと、$\nabla F = 2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}$。よって法線ベクトル $\mathbf{n}$ は

$$
\mathbf{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} = \frac{2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}}{\sqrt{4x^2+4y^2}} = \frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}}{|\mathbf{r}|}
$$

となり S 上で $|\mathbf{r}| = R$ であるから

$$
\mathbf{A}\cdot\mathbf{n} = \frac{2}{R}xyz
$$

面積元素 $dS = Rd\phi dz$、また $x = R\cos\phi,\ y = R\sin\phi$ として、

$$
\begin{aligned}
\int \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}dS &= \int \frac{2}{R}xyz\ dS = \int \frac{2}{R}R^2 z\sin\phi\cos\phi\ dS \\
&= \int Rz\left(2\sin\phi\cos\phi\right)dS = \int R\sin 2\phi\ dS \\
&= \int_0^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} Rz\sin 2\phi\ Rd\phi dz = \int_0^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2 z\sin 2\phi\ d\phi dz \\
&= -2R^2
\end{aligned}
$$

5. $F = x^2+y^2+z^2$ とおくと、$\nabla F = 2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+2z\mathbf{k}$。よって法線ベクトル $\mathbf{n}$ は

$$
\mathbf{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} = \frac{2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+2z\mathbf{k}}{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}} = \frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}
$$

となり S 上で $|\mathbf{r}| = R$ であるから

$$
\mathbf{A}\cdot\mathbf{n} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}
$$

π, ε_0, Q, R が定数であることに注意して

$$\int \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} dS = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R^2} \int dS = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R^2} \times 4\pi R^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

このとき、半径 r を R_1, R_2 としても積分値は変わらない。つまり、電荷 Q を含む閉曲面に関して、Q からくる電場を法線面積分した値は、閉曲面の大きさによらず、Q と ε_0 で決定する。