電磁気学要論　演習

第 7 回　解答

1. (イ) xy 平面上の面では $z=0$ であることに注意して、

$$\mathbf{A}=(x^2-y^2)\,\mathbf{i}+2xy\mathbf{j}+(y^2-xy)\,\mathbf{k},\quad \mathbf{n}=-\mathbf{k}\qquad \therefore\ \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}=-y^2+xy$$

よって

$$\int dS=\iint\left(-y^2+xy\right)dxdy=\int_0^1\left\{\int_0^1\left(-y^2+xy\right)dy\right\}dx$$

$$=\int_0^1\left[-\frac{y^3}{3}+\frac{xy^2}{2}\right]_0^1 dx=\int_0^1\left(-\frac{1}{3}+\frac{x}{2}\right)dx=-\frac{1}{12}$$

その対面では $z=1$、$\mathbf{n}=\mathbf{k}$ であるから

$$\int dS=\frac{1}{12}$$

同様にして

(ロ) yz 平面上の面では

$x=0$ のとき $\int dS=\dfrac{1}{3}$、 $x=1$ のとき $\int dS=\dfrac{2}{3}$

(ハ) zx 平面上の面では

$y=0$ のとき $\int dS=0$、 $y=0$ のとき $\int dS=1$

(イ)、(ロ)、(ハ)を全て加えて全表面に関する法線面積分の値は 2。

ガウスの発散定理を用いた場合

$$\oint \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}dS=\int\nabla\cdot\mathbf{A}dv=\int\left(2x+2y\right)dv=\iiint 4xdxdydz=\iint\left[2x^2\right]_0^1 dydz=\iint 2ydydz=2$$

2. ストークスの定理を用いて

$$\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}=\int_S\left(\nabla\times\mathbf{A}\right)\cdot\mathbf{n}\,dS$$

ここで、経路 C は xy 平面上の反時計回りであるから、$\mathbf{n}=\mathbf{k}$ 。よって

$$\int_S\left(\nabla\times\mathbf{A}\right)\cdot\mathbf{n}\,dS=\int_S\left(\nabla\times\mathbf{A}\right)\cdot\mathbf{k}\,dS$$

$$=\int_S\left(\nabla\times\mathbf{A}\right)_z\,dS$$

$$=\int_S\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)dS$$

$$=\int_S dS=\pi$$

S は半径 1 の円であることに注意。

3. (a) 単位法線ベクトル $\mathbf{n} = \dfrac{2\mathbf{i} + \mathbf{j}}{\sqrt{5}}$、$dS = \sqrt{5}dxdz$ より

$$\int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \int_0^4 \int_0^3 (12 - 2x) dxdz = \int_0^4 \left[12x - x^2\right]_0^3 dz = \int_0^4 27dz = 108$$

(b) 単位法線ベクトル $\mathbf{n} = \dfrac{2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{3}$、$dS = \dfrac{3}{2}dxdy$ より

$$\int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \iint \left\{y^2 + y(6 - 2x - y)\right\} dxdy = \int_0^3 \left\{\int_0^{6-2x} y(6 - 2x) dy\right\} dx = 81$$

4. 発散定理において、$\mathbf{A} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ とおく（$\mathbf{B}$ は$\neq 0$の定ベクトル）。すると

$$\int_V \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) dv = \int_S (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\int_v \{\mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})\} dv = \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} dS$$

$$\int_v \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dv = \int_S \mathbf{B} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{A}) dS$$

ただし、$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B}\,(\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A}\,(\nabla \times \mathbf{B})$、$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A}$（スカラー三重積）、$\nabla \times \mathbf{B} = 0$（$\mathbf{B}$ は定ベクトル）を用いた。

ここで、$\mathbf{B}$ は定ベクトルであるから、

$$\mathbf{B} \cdot \int_v (\nabla \times \mathbf{A}) dv = \mathbf{B} \cdot \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{A}) dS$$

これに $\mathbf{B}/|\mathbf{B}|^2$ を内積して

$$\int_v (\nabla \times \mathbf{A}) dv = \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{A}) dS$$