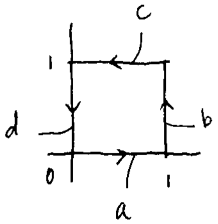
電磁気学要論 演習

第6回 解答

1. ① 線積分の場合



a: $\int_0^1 (3x^2 - 4y^2)\, dx$; $y=0$ を考慮して

$= [x^3]_0^1 = 1$

b: $\int_0^1 (-2xy)\, dy$; $x = 1$

$= [-y^2]_0^1 = -1$

c: $\int_1^0 (3x^2 - 4y^2)\, dx$; $y = 1$

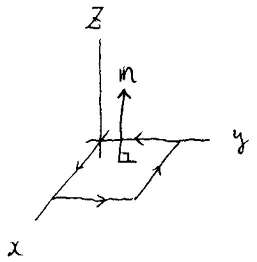
$= [x^3 - 4x]_1^0 = 3$

d: $\int_1^0 (-2xy)\, dy$; $x = 0$

$= 0$

よって $1 + (-1) + 3 + 0 = 3$

② ストークスの定理の場合



$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n}\, dS$$

ここで 明らかに $\mathbf{n} = \mathbf{k}$. だから

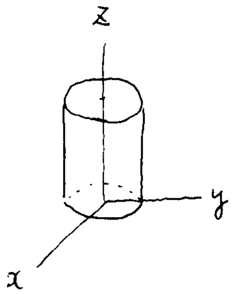
$$= \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{k}\, dS = \int_S (\nabla \times \mathbf{A})_z\, dS$$

$$= \int_S \{-2y - (-8y)\}\, dS$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 +6y\, dx\, dy = 3$$

よって等しい.

2



ガウスの発散定理を用い

$$\int_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS = \int_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,dv$$

$$= \int_V (1-1+2z)\,dv$$

$$= \iint\int_{z=0}^{z=1} 2z\,dx\,dy\,dz$$

$$= \iint dx\,dy$$

これは円の面積に同じ.

$$= \pi$$

3 ストークスの定理より

$$\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{n}\,dS$$

1と同様 $\mathbf{n}=\mathbf{k}$.

$$= \int_S (\nabla\times\mathbf{A})_z\,dS$$

$$= \int_S (2x-1)\,dS$$

$$= \int_{y=-2}^{y=2}\int_{x=-\sqrt{4-y^2}}^{x=\sqrt{4-y^2}} (2x-1)\,dx\,dy$$

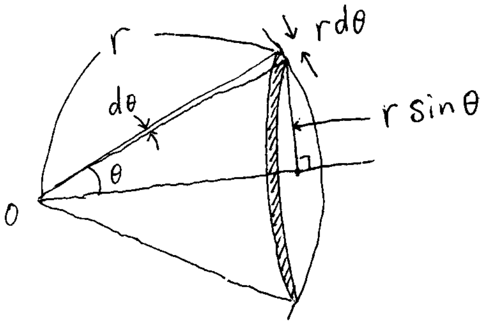
$$= \int_{-2}^{2} -2\sqrt{4-y^2}\,dy$$

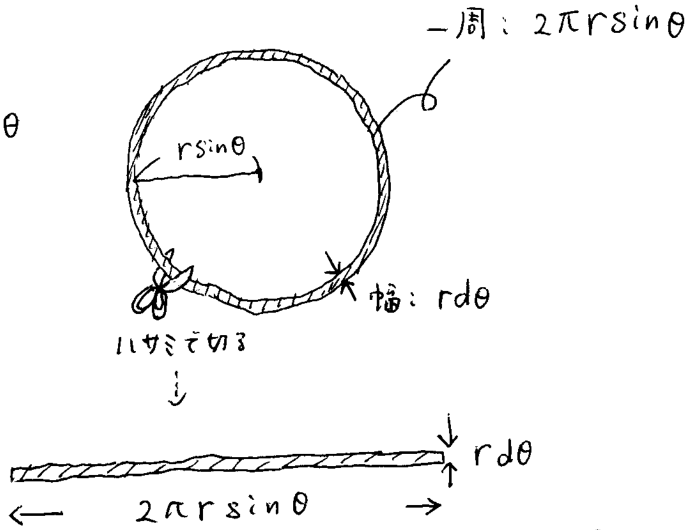
$$= -4\pi$$

4 とくに解答はありません。

5. 立体角 ω は

$\omega = \dfrac{S}{r^2}$。よって S を求める。わぎりの積分





よって 微少面積は $\underbrace{2\pi r^2 \sin\theta\, d\theta}_{dS}$

これを集める

$$\int dS = S = \int_0^{\alpha} 2\pi r^2 \sin\theta\, d\theta = 2\pi r^2 \left[-\cos\theta\right]_0^{\alpha}$$

$$= 2\pi r^2 (1-\cos\alpha) \; //$$

$$\therefore\ \omega = \frac{S}{r^2} = 2\pi(1-\cos\alpha) \; //$$