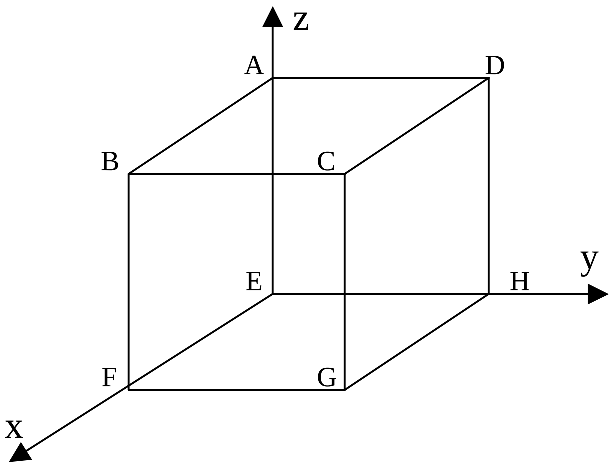
電磁気学要論演習第 5 回解答

1.　S は下図のような立方体の全ての側面である．単一の式でこれらの側面全てを表現することはできないので、各側面について面積分しそれらの結果を足し合わせる必要がある．



まず、面 BCGF について面積分する．この面は $x=1$ と表されるので、面上では $\boldsymbol{F}=4z\boldsymbol{i}-y^2\boldsymbol{j}+yz\boldsymbol{k}$ となる．また $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{i}, dS=dydz$ なので、

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS=4zdydz$$

$$\int_{BCGF}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}dS=\int_0^1\left(\int_0^1 4zdy\right)dz$$

$$=2$$

同様に各面について積分すると以下のようになる．

面 ABCD ： $z=1,\boldsymbol{n}=\boldsymbol{k},dS=dxdy$

$$\therefore\int_{ABCD}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}dS=\int_0^1\left(\int_0^1 ydx\right)dy$$

$$=\frac{1}{2}$$

面 CDHG： $y=1,\boldsymbol{n}=\boldsymbol{j},dS=dxdz$

$$\therefore\int_{CDHG}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}dS=-\int_0^1\left(\int_0^1 dx\right)dz$$

$$=-1$$

面 AEHD： $x=0,\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{i},dS=dydz$

$$\therefore\int_{CDHG}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dS=0$$

面 EFGH： $z=0, \boldsymbol{n}=-k, dS=dxdy$

$$\therefore \int_{EFGH} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = 0$$

面 ABFE： $y=0, \boldsymbol{n}=-\boldsymbol{j}, dS=dxdz$

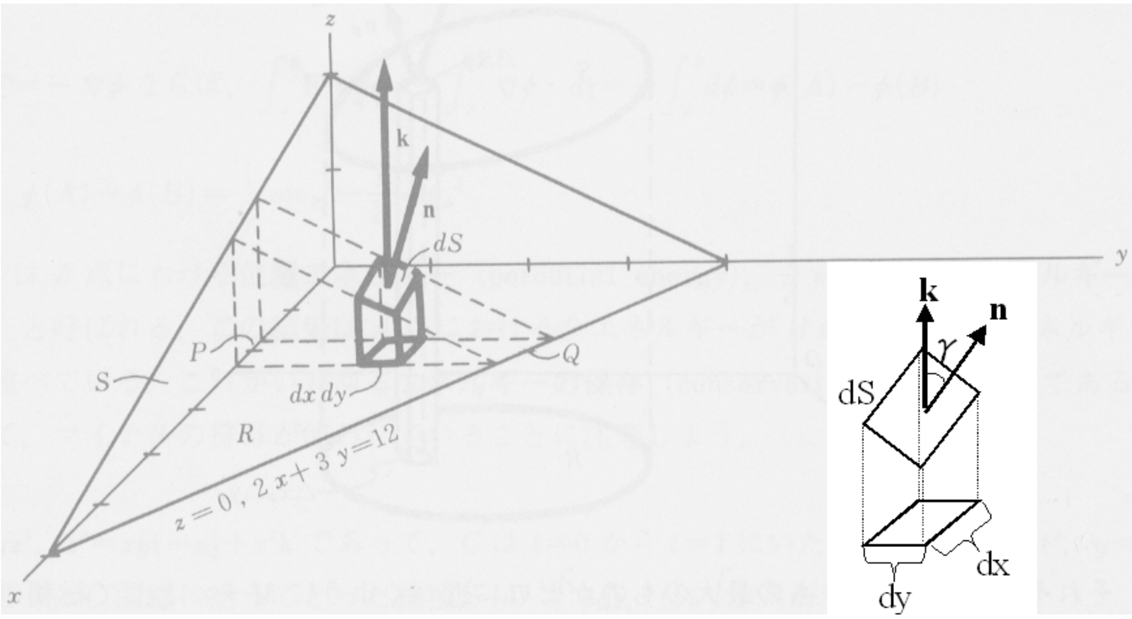
$$\therefore \int_{CDHG} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = 0$$

以上より

$$\int_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} dS = 2+\frac{1}{2}-1+0+0+0=\frac{3}{2}$$

となる.

2. まず、曲面 S との xy(もしくは yz か xz)平面への正射影 R を考える.



曲面 S 上にある任意の点に対する単位法線ベクトル n と xy 平面の任意の点に対する単位法線ベクトル k **のなす角を** γ **とすると**

$$n \cdot k = \cos\gamma$$

であるから、図より

$$dS\left|\cos\gamma\right| = dxdy$$

$$dS = \frac{dxdy}{\left|\cos\gamma\right|}$$

$$= \frac{dxdy}{\left|n \cdot k\right|}$$

と書き換えられることを利用する．（同様に yz,xz 平面との正射影を考えた場合はそれぞれ

$dS = \dfrac{dydz}{|n \cdot i|}$, $dS = \dfrac{dxdz}{|n \cdot j|}$ と書き換えられる．）

曲面 S と直交する単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ を求めるには、曲面 $2x+3y+6z=12$ と直交するベクトルが $\nabla(2x+3y+6z) = 2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+6\mathbf{k}$ によって与えられることに注意する．よって、曲面 S 上にある任意の点に対する単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ 次式によって与えられる．

$$\mathbf{n} = \frac{2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+6\mathbf{k}}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}} = \frac{2}{7}\mathbf{i}+\frac{3}{7}\mathbf{j}+\frac{6}{7}\mathbf{k}$$

よって

$$|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k}| = \left|\left(\frac{2}{7}\boldsymbol{i}+\frac{3}{7}\boldsymbol{j}+\frac{6}{7}\boldsymbol{k}\right)\cdot k\right| = \frac{6}{7}$$

であるから

$$\frac{dxdy}{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k}|} = \frac{7}{6}dxdy$$

次に

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{n} = (18\mathbf{i}-12\mathbf{j}+3y\mathbf{k})\cdot\left(\frac{2}{7}\mathbf{i}+\frac{3}{7}\mathbf{j}+\frac{6}{7}\mathbf{k}\right)$$

$$= \frac{36z-36+18y}{7} = \frac{36-12x}{7}$$

［∵ 曲面 S の方程式から $z = \dfrac{12-2x-3y}{6}$ ］

よって

$$\iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}dS = \iint_R \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\frac{dxdy}{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}|}$$

$$= \iint_R \left(\frac{36-12x}{7}\right)\frac{7}{6}dxdy$$

$$= \iint_R (6-2x)dxdy$$

さて、xy 平面状の領域 R の上でこの二重積分を計算するには、x を固定して y について 0 から $y = \dfrac{12-2x}{3}$ まで積分し、続いて、x について、$x=0$ から $x=6$ まで積分する．こうすれば、領域 R を余すことなくカバーすることができる．この方法で積分を行うと

$$\int_{x=0}^{6}\int_{y=0}^{(12-2x)/3}(6-2x)dydx=\int_{x=0}^{6}\left(24-12x+\frac{4x^2}{3}\right)dx=24$$

単位法線ベクトル N の正の方向をこれとは反対の方向に選んだとすると、上記面積分の値は符号が反対に、-24 となる.

3.

発散の定理より

$$\int_S \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}dS$$

$$=\int_V \nabla\cdot\mathbf{r}dV$$

$$=\int_V\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})dV$$

$$=\int_V\left(\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}\right)dV=3\int_V dV=3V$$

4.

発散定理より

$$\int_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}dS=\int_V(\nabla\cdot\boldsymbol{F})dV$$

$$=\int_V(4z-y)dV$$

ただし V は図 1 で表される立方体内の領域である。よって

$$\int_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}dS=\int_V(4z-y)dV$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1(4z-y)dz$$

$$=\frac{3}{2}$$