第２回　電磁気学要論演習　解答

問１　ベクトル三重積の問題。（１）はスカラー三重積、（２）はベクトル三重積

（１）

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) &= \mathbf{A}\cdot\{(B_yC_z - B_zC_y)\,\mathbf{i} + (B_zC_x - B_xC_z)\,\mathbf{j} + (B_xC_y - B_yC_x)\,\mathbf{k}\} \\ &= \mathbf{A}\cdot\{(16-21)\,\mathbf{i} + (21-0)\,\mathbf{j} + (0+28)\,\mathbf{k}\} \\ &= (-2\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} + 5\,\mathbf{k})\cdot(-5\,\mathbf{i} + 21\,\mathbf{j} + 28\,\mathbf{k}) \\ &= 213\end{aligned}$$

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

としてもよい。

（２）

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) &= (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\,\mathbf{B} - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\,\mathbf{C} \\ &= -13\,\mathbf{B} - 3\,\mathbf{C} \\ &= -21\,\mathbf{i} + 31\,\mathbf{j} - 27\,\mathbf{k}\end{aligned}$$

問２　合成関数（スカラーとベクトル）の微分が、今までの合成関数の微分と同様に扱えることを示す問題

$$\begin{aligned}\text{左辺} &= \nabla\cdot(\varphi\,A_x\,\mathbf{i} + \varphi\,A_y\,\mathbf{j} + \varphi\,A_z\,\mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial(\varphi\,A_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\varphi\,A_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\varphi\,A_z)}{\partial z} \quad \text{（合成関数の微分）} \\ &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}A_x + \varphi\frac{\partial A_x}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}A_y + \varphi\frac{\partial A_y}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}A_z + \varphi\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{右辺} &= \nabla\varphi\cdot\mathbf{A} + \varphi\,\nabla\cdot\mathbf{A} \\ &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,\mathbf{k}\right)\cdot\mathbf{A} + \varphi\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) \\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}A_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}A_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}A_z + \varphi\frac{\partial A_x}{\partial x} + \varphi\frac{\partial A_y}{\partial y} + \varphi\frac{\partial A_z}{\partial z}\end{aligned}$$

左辺と右辺は等しい。証明終わり。

問３　ラプラシアンを扱った問題

$$\nabla^2\varphi=\nabla\cdot(\nabla\,\varphi)=\nabla\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\mathbf{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\mathbf{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,\mathbf{k}\right)=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=2y+2z+2x$$

問４　勾配、発散の計算問題。（４）は問２〜４の結果を使って解ける

（１）

$$\begin{aligned}\nabla r&=\frac{\partial r}{\partial x}\,\mathbf{i}+\frac{\partial r}{\partial y}\,\mathbf{j}+\frac{\partial r}{\partial z}\,\mathbf{k}\\&=\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,\mathbf{i}+\frac{1}{2}\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,\mathbf{j}+\frac{1}{2}\frac{2z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,\mathbf{k}\\&=\frac{x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}}{r}=\frac{\mathbf{r}}{r}\end{aligned}$$

（２）

$$\begin{aligned}\nabla\frac{1}{r}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\mathbf{k}\\&=-\frac{1}{2}\frac{2x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\,\mathbf{i}-\frac{1}{2}\frac{2y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\,\mathbf{j}-\frac{1}{2}\frac{2z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\,\mathbf{k}\\&=-\frac{x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}}{r^3}=-\frac{\mathbf{r}}{r^3}\end{aligned}$$

（３）

$$\nabla\cdot\mathbf{r}=\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial y}{\partial y}=1+1+1=3$$

（４）

$$\begin{aligned}\nabla^2 r&=\nabla\cdot(\nabla\,r)=\nabla\cdot\frac{\mathbf{r}}{r}=\nabla\frac{1}{r}\cdot\mathbf{r}+\frac{1}{r}\nabla\cdot\mathbf{r}\\&=-\frac{\mathbf{r}}{r^3}\cdot\mathbf{r}+\frac{1}{r}\times 3=-\frac{r^2}{r^3}+\frac{3}{r}=\frac{2}{r}\end{aligned}$$

第一回演習の採点が終わりましたので、返却いたします。６１号館３階、堀越研究室の前の机に置いてありますので、各自取りに来て下さい。これ以降の演習についても同じです。また、分からなくなったら早めに質問しましょう。研究室でも受け付けています（先生もしくは TA のいるときにお願いします)。例年テスト前に込み合います。