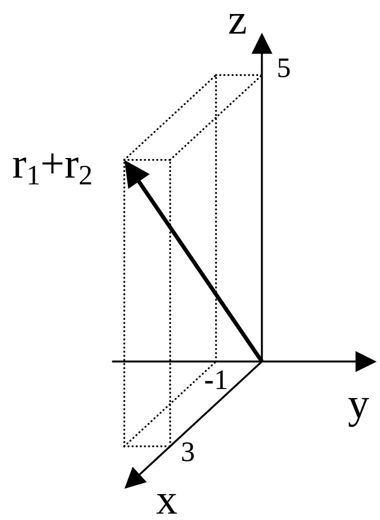
電磁気学要論演習第 1 回解答

1. a) $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{OP} = 2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$

$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{OQ} = \boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$



b) $\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 = (2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}) + (\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k})$

$= (2+1)\boldsymbol{i} + (4-5)\boldsymbol{j} + (3+2)\boldsymbol{k}$

$= 3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$

$r_1 + r_2$ を図示すると右図のようになる。

c) $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2 = (2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}) - (\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k})$

$= \boldsymbol{i} + 9\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$

$\therefore |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2| = \sqrt{1^2 + 9^2 + 1^2} = \sqrt{83}$

d) $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ 方向の単位ベクトルは、$\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ に平行でかつ大きさが 1 のベクトルである。

よって単位ベクトルは

$$\frac{\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2|} = \frac{\boldsymbol{i} + 9\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}}{\sqrt{83}}$$

2. $\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 = 10\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}$ より

$\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 = 10 \cdots (2.1)$

$\mathrm{y}_1 - 1 = 1$

$\mathrm{z}_1 + 5 = 8$

よって

$\mathrm{y}_1 = 2$

$\mathrm{z}_1 = 3$

また $|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2| = \sqrt{29}$ より

$$\sqrt{(\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2)^2 + (2 - (-1))^2 + (3-5)^2} = \sqrt{29}$$

$\Leftrightarrow (\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2)^2 = 16$

$\therefore \mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2 = \pm 4 \cdots (2.2)$

式(2.1),(2.2)より

$(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) = (7,3) \mathrm{or} (3,7)$

3. a) $\boldsymbol{A}=\left(a_1,a_2,a_3\right)$、 $\boldsymbol{B}=\left(b_1,b_2,b_3\right)$とする。

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\left(a_2b_3-a_3b_2\right)\boldsymbol{i}+\left(a_3b_1-a_1b_3\right)\boldsymbol{j}+\left(a_1b_2-a_2b_1\right)\boldsymbol{k}$$

$$\begin{aligned}\therefore \boldsymbol{A}\cdot\left(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\right)&=\left(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}\right)\cdot\left\{\left(a_2b_3-a_3b_2\right)\boldsymbol{i}+\left(a_3b_1-a_1b_3\right)\boldsymbol{j}+\left(a_1b_2-a_2b_1\right)\boldsymbol{k}\right\}\\ &=a_1\left(a_2b_3-a_3b_2\right)+a_2\left(a_3b_1-a_1b_3\right)+a_3\left(a_1b_2-a_2b_1\right)\\ &=a_1a_2b_3-a_1a_3b_2+a_2a_3b_1-a_2a_1b_3+a_3a_1b_2-a_3a_2b_1\\ &=0\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}\mathbf{A}\times\left(\mathbf{B}\times\mathbf{C}\right)&=\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}\right)\mathbf{B}-\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\right)\mathbf{C}\\ &=\left\{\left(\mathbf{i}-2\mathbf{j}-3\mathbf{k}\right)\cdot\left(\mathbf{i}+3\mathbf{j}-2\mathbf{k}\right)\right\}\mathbf{B}-\left\{\left(\mathbf{i}-2\mathbf{j}-3\mathbf{k}\right)\cdot\left(2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}\right)\right\}\mathbf{C}\\ &=\left(2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}\right)-3\left(\mathbf{i}+3\mathbf{j}-2\mathbf{k}\right)\\ &=-\mathbf{i}-8\mathbf{j}+5\mathbf{k}\end{aligned}$$

4. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ に垂直な単位ベクトルは、この 2 つのベクトルの外積を取ったもの($\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$)をそれ自身の大きさで割ったものなので

$$\pm\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\left|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\right|}=\pm\frac{1}{\sqrt{155}}\left(-3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+11\boldsymbol{k}\right)\quad\left(\because\ \frac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}}{\left|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}\right|}=-\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\left|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\right|}\right)$$

$\left|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\right|=\left|\boldsymbol{a}\right|\left|\boldsymbol{b}\right|\sin\theta$ より

$$\therefore \sin\theta=\frac{\left|\mathrm{a}\times\mathrm{b}\right|}{\left|\mathrm{a}\right|\left|\mathrm{b}\right|}=\frac{\sqrt{155}}{2\sqrt{39}}$$